МАТЕМАТИЧЕСКИЕ, СТАТИСТИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ЭКОНОМИКЕ

Балтийский экономический журнал. 2024. № 1(45). С. 6–16.
Baltic Economic Journal. 2024. No. 1(45). P. 6–16.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ, СТАТИСТИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ЭКОНОМИКЕ

Научная статья
УДК 519.862.2
doi: 10.46845/2073-3364-2024-0-1-6-16

Регрессионные методы наименьших отклонений как инструмент анализа предприятий

Юрий Яковлевич Настин[1],
Андрей Владимирович Казанцев[2]
[1]ИНОТЭКУ ФГБОУ ВО "КГТУ", Калининград, Россия
[2]ООО "Рус-ОйлЭкс", Калининград, Россия
[1]yury.nastin@klgtu.ru

Аннотация. Исследованы вопросы сравнительного анализа моделей и методов из эконометрики на примере рыбоперерабатывающих предприятий. Внимание сосредоточено на критериях оптимальности регрессионных моделей. Рассмотрено четыре типа двухфакторных задач. Первые две – линейные с критериями: а) минимум суммы наименьших квадратов; б) минимум суммы наименьших модулей. Вторые две – нелинейные, на примере функции Кобба–Дугласа: а) с мультипликативными отклонениями и критерием минимум суммы квадратов логарифмов относительных отклонений; б) с аддитивными отклонениями, задача внутренне нелинейная, с критерием минимум суммы наименьших квадратов. Применяются аналитические и поисковые методы решений.

Ключевые слова: регрессионные модели линейные и нелинейные, отклонения аддитивные и мультипликативные, методы решения аналитические и вычислительные, функция Кобба–Дугласа, сравнительный анализ методов и результатов, экономический смысл критериев и параметров уравнений

Для цитирования: Настин Ю. Я., Казанцев А. В. Регрессионные методы сумм наименьших отклонений как инструмент анализа рыбоперерабатывающих предприятий // Балтийский экономический журнал. 2024, № 1(45). С. 6–16. https://doi.org /10.46845/2073-3364-2024-0-1-6-16

MATHEMATICAL, STATISTICAL AND INSTRUMENTAL METHODS IN ECONOMICS

Original article

Regression methods of least deviations as a tool for enterprise analysis

Yuri Ya. Nastin[1]
Andrey V. Kazantsev[2]
[1]INOTECU FGBOU VO "KSTU", Kaliningrad, Russia
[2]"Rus-OilEx" LLC, Kaliningrad, Russia
[1]yury.nastin@klgtu.ru

Abstract. The issues of comparative analysis of models and methods from econometrics are studied using the example of fish processing enterprises. Attention is focused on the optimality criteria for regression models. Four types of two-factor problems are considered. The first two are linear with the following criteria: a) minimum sum of least squares; b) the minimum of the sum of the smallest modules. The second two are nonlinear, using the Cobb-Douglas function as an example: a) with multiplicative deviations and the criterion of the minimum sum of squared logarithms of relative deviations; b) with additive deviations, the problem is internally nonlinear, with the minimum sum of least squares criterion. Analytical and search methods of solutions are used.

Keywords: linear and nonlinear regression models, additive and multiplicative deviations, analytical and computational solution methods, Cobb-Douglas function, comparative analysis of methods and results, economic meaning of criteria and parameters of equations

For citation: Nastin Yu. Ya., Kazantsev A. V. Regression methods of sums of least deviations as a tool for analyzing fish processing enterprises // Baltic Economic Journal. 2024;1(45):6-16. (In Russ.). http://dx.doi.org/10.46845/2073-3364-2024-0-1-6-16

Методы и модели эконометрики находят всё большее применение в различных отраслях и сферах экономики. Это убедительно показано в работе [1, Настин] – рассмотрены её содержание и границы. В работе [2, Сергеев] показана результативность применения эконометрики, в частности, функции Кобба–Дугласа, в рыбной отрасли. Эконометрика прочно вошла в программы обучения в вузах [3, Карлов]. Ниже в статье рассмотрено несколько задач регрессионного анализа и сделана попытка выйти за рамки общепринятых подходов.

Основой для моделирования служит принцип чёрного ящика, когда фиксируются факторные переменные на входе и результирующая переменная на выходе. Факторных переменных может быть одна, две и больше. В работе [4, Берндт, с. 88-92] использована трёхфакторная функция Кобба–Дугласа, в качестве факторов выступают капитал, труд и топливо. Без ограничения общности мы ограничимся двухфакторными моделями – линейными и нелинейными.

Введём обозначения: x_1 – вложенный капитал – стоимость основных фондов предприятия, руб.; x_2 – объём труда, чел*мес./год; y – объём произведённой за год рыбной продукции, руб./год.

Начнём с линейной стохастической модели:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \varepsilon_i, \quad \forall i \in 1:n, \qquad (1)$$

где β− неизвестные параметры модели; n–число предприятий; ε_i – аддитивное отклонение (остаток, возмущение) – случайная величина.

Из модели (1) следует, что отклонение – абсолютная величина и вычисляется как разность:

$$\varepsilon_i = y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2}) \quad \forall i \in 1:n. \qquad (2)$$

Возьмём математическое ожидание от обеих частей модели (1) и получим детерминированную модель предприятия в форме линейного уравнения регрессии:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2, \qquad (3)$$

где $M(\varepsilon_i) = 0$; b_0, b_1, b_2 – искомые оценки параметров β.

Для отыскания значений оценок используется, как правило, критерий:

$$S1(b_0, b_1, b_2) = \sum (yi - \hat{y}i)^2 = \sum (yi - (b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2))^2 \rightarrow \min. \qquad (4)$$

Требуется найти значения параметров b_0, b_1, b_2 такие, которые доставляют минимум функции S1 − сумме *квадратов* абсолютных отклонений ε.

Совокупность выражений (1)−(4) называют классическим методом наименьших квадратов, обозначим его как МНКК-метод. Его особенностью является подавление зашумлённости выборки и усиление влияния выбросов. Например, наблюдённое малое значение отклонения ε =0,3 ослабляется ещё больше: ε^2= 0,09, а большое значение ε =3 усиливается до 9. Здесь мы касаемся теории выборки.

Помимо рассмотренного, существует метод с другим критерием оптимальности: минимизировать сумму модулей отклонений. Назовём его методом наименьших модулей − МНМ-метод. Критерий оптимальности записывается выражением:

$$S2(b_0, b_1, b_2) = \sum |yi - \hat{y}i| = \sum |yi - (b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2)| \rightarrow \min. \qquad (5)$$

Требуется найти значения параметров b_0, b_1, b_2 такие, которые доставляют минимум функции S2 − сумме *модулей* абсолютных отклонений ε. Заметим, что функции S1 и S2 нельзя сравнивать непосредственно, они имеют различные единицы измерения: руб.^{2} и руб.

Разные критерии (методы) влекут различные требования к свойствам моделей (предпосылки), например, требование нормального закона распределения вектора $\varepsilon=(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n)$. Но мы сосредоточим внимание на особенностях самих методов, поскольку их выбор прямо влияет на результаты экономического анализа моделируемых предприятий. Эта сторона вопроса часто не принимается во внимание исследователями.

Попробуем получить решение задачи двумя рассмотренными выше методами и сравним результаты.

Формулировка и решение задачи-1. Её составляющие: модель (1), уравнение регрессии (3), критерий (4) − классическая задача линейного анализа; в таблице 1 даны исходные данные по семи предприятиям. Задача решается аналитически (по формулам) – путём решения системы n линейных уравнений: $\nabla S1(b_0, b_1, b_2) = 0$. Решим задачу МНКК-методом опцией Регрессия из программы Excel.

Таблица 1 – Исходные данные (условные) по 7-ми предприятиям
Table 1 – Initial data (conditional) for 7 enterprises

X1	1	1	2	3	4	5	8	*10^9.руб.
X2	1	2	2	3	3	4	6	*100 чел.
Y	2	3	4	5	5	7	14	*10^8 руб.

Результаты решения:

уравнение регрессии $\hat{y}$ = -0,875 + 0,500x_1 + 1,625x_2; (6)

минимальное значение S1=4,759 (*10^8 руб.)^2. (7)

Формулировка и решение задачи-2. Её составляющие**:** модель (1), уравнение регрессии (3), критерий (5), исходные данные в таблице 1. Задача-2 не решается аналитически (по формулам) путём решения системы n нелинейных уравнений $\nabla S2(b_0, b_1, b_2)=0$. Поэтому мы применим численный метод, используя для этого надстройку "Поиск решения" из Excel. Результаты решения:

уравнение регрессии $\hat{y}$ = 0,483 + 0,500x_1 + 1,006x_2. (8)

минимальное значение S2=4,511 (*10^8 руб.). (9)

Как видно из выражений (6) и (8), параметры уравнений регрессий заметно отличаются друг от друга. Напомним, что S1 и S2 измеряются в разных единицах, поэтому прямо их сравнивать нельзя. В работе [5, Дрейпер, глава 6] целая глава посвящена выбору "наилучшего" уравнения регрессии. Однако речь идёт, в основном, об отборе значимых факторов. Для сравнения методов МНКК и МНМ мы предлагаем ввести функцию S2.1 – результат использования уравнения регрессии (8) из второй задачи, а критерия – из первой. Другими словами, S2.1 – это сумма *квадратов отклонений*, но рассчитанная на основе уравнения (8). Здесь мы используем такую схему:

а) в уравнение (8) подставляются исходные данные для x_1 и x_2, получаем семь регрессионных значений $\hat{y}$;

б) вычисляем семь разностей (y-$\hat{y}$);

в) вычисляем их квадраты разностей;

г) суммируем эти квадраты и получаем $S2.1_{мин}$.

В нашем примере минимальное значение:

$S2.1_{мин}$=12,643 (*10^8 руб.)^2. (10)

Окончательно, $S1_{мин}$=4,759 (10^8 руб.)^2 и $S2.1_{мин}$=12,643 (10^8 руб.)^2.

Вывод: по данному критериальному показателю первый метод заметно превосходит второй – у него меньше сумма квадратов отклонений.

Конец задачи-2.

Обсудим экономический смысл параметров уравнений (6) и (8).

1). Параметр b_0 смысла не имеет – это ненулевой объём производства при нулевых ресурсах. Он измеряется в тех же единицах, что и $\hat{y}$. Отсюда вывод: уравнения (6) и (8) предпочтительно использовать, например, при экстраполяции, в правой части области наблюдения, где $X \geq \overline{X}$.

При необходимости использовать модель в левой части области наблюдения (при $X \leq \overline{X}$) желательно исключить b_0 из уравнения регрессии и модели:

$$y = b_1x_1 + b_2x_2 + \varepsilon. \quad (11)$$

Иногда это может ухудшить качество модели (плоскость будет привязана к началу координат, и она "встанет торчком"). Более "мягко" привязать поверхность y(X) можно с помощью квадратичной модели, также без b_0:

$$y= b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3^2+b_4x_4^2+ \varepsilon. \qquad (12)$$

2). Знак b_0 указывает на характер истинной неизвестной зависимости y(X): если $b_0<0$, то функция y(X) выпуклая, иначе – вогнутая.

3). Параметр b_1 – это фондоотдача, он равен отношению произведённой за год продукции к стоимости основных фондов (руб./год)/руб.)).

4). b_2 – это производительность труда − отношение произведённой за год продукции к объёму затраченного труда (руб./год)/(чел.*мес.).

Продолжим наш анализ на основе нелинейной производственной функции Кобба−Дугласа. Одно из важных преимуществ её перед аддитивными моделями (3) или (12) – это мультипликативная связь ресурсов между собой. В классической форме функция записывается так:

$$Q=A\cdot K^{\alpha}L^{\beta}, \qquad (13)$$

где Q − объем производства, руб./год; A – технологический коэффициент; K − стоимость капитала, например, основных фондов, руб.; L − затраты труда, чел.*мес./год; $\alpha\geq0$ и $\beta\geq0$ − коэффициенты частной эластичности производства Q соответственно по затратам капитала K и труда L.

Экономический смысл α и β: при увеличении затрат капитала (труда) на 1 % объем производства увеличивается на α % (β %).

Для удобства мы будем использовать такие обозначения вместо выражения (13):

$$\hat{y} = \gamma\cdot x_1^{\alpha}x_2^{\beta}. \qquad (14)$$

Формулировка и решение задачи-3. Задача состоит из двух частей: 1-я часть – пункты 1-10; 2-я часть − пункты 10-13.

Часть-1 задачи-3. Особенность задачи определяется типом стохастической регрессионной модели:

$$y=\gamma x_1^{\alpha}x_2^{\beta}\varepsilon_2, \qquad (15)$$

где ε_2 – случайная величина, мультипликативное отклонение (возмущение).

Для модели (15) функция Кобба−Дугласа (14) классифицируется так: она является нелинейной по параметрам, но внутренне линейной, она допускает линеаризацию. Назовём такой подход к функции Кобба−Дугласа о*бычным.* Он состоит в нахождении параметров модели (15) путём её логарифмирования и перевода в линейную аддитивную форму. По этому поводу в работе [6, Энциклопедия, с. 523] сказано: "… некоторые нелинейные относительно параметров β модели подходящим преобразованием … сводятся к … линейной форме". Последуем этому совету. Цепь преобразований:

1). Имеем исходную нелинейную стохастическую регрессионную модель (15) с мультипликативным отклонением.

2). Берём математическое ожидание от левой и правой частей (15), имея в виду, что $M(\varepsilon_2) = 1$, получаем уравнение регрессии (14).

3). Логарифмируем (14), получаем:

$$\ln(\hat{y}) = \ln(\gamma)+\alpha\cdot\ln(x1)+\beta\cdot\ln(x2) +\ln(\varepsilon). \qquad (16)$$

4). Заменяем выражения из уравнения (16) на новые переменные, получаем вспомогательную линейную модель:

$$z=a+\alpha\cdot u+\beta\cdot v+\varepsilon_{3..} \qquad (17)$$

5). Берём математическое ожидание от обеих частей уравнения (17) и получаем уравнение регрессии:

$$\hat{z}= z=a+\alpha\cdot u+\beta\cdot v. \qquad (18)$$

6). Записываем для уравнения (18) критерий оптимальности параметров классического МНК-метода: они должны доставлять *минимум функции S3 − сумме квадратов разностей абсолютных отклонений − значений наблюдённых* z_i *и регрессионных* $\hat{z}_i$*:*

$$S3(a, \alpha, \beta) = \sum(z_i-\hat{z}_i)^2\rightarrow \min. \qquad (19)$$

7). Задача-3 состоит из нелинейной модели (15), линейного вспомогательного уравнения регрессии (18), критерия оптимальности параметров (19).

8). Решаем в Excel опцией Регрессия вспомогательную задачу для двухфакторной линейной регрессии (аналогично задаче-1). Получаем уравнение (18) "в числах":

$$\hat{z}= 0,623 + 0,266\, u + 0,711v. \qquad (20)$$

9). Переписываем уравнение (20) в прежних обозначениях:

$$\ln y = e^{0,623} + 0,266 \ln(x_1)+0,711 \ln(x_2). \qquad (21)$$

10). Потенцируем уравнение (21) и получаем функцию Кобба−Дугласа "в числах":

$$\hat{y} = 1,8645\cdot x_1^{0,266}\cdot x_2^{0,711} \qquad (22)$$

В таблице 2 представлено:

- графы 1-3 – исходные данные из таблицы 1;
- графы 4-6 – полученные данные для переменных в уравнении (17);
- графы 7-9 − полученные данные для функции (22) и суммы S31 ($*10^8$ руб.)^2.

Таблица 2 – Расчётная таблица для задачи-3
Table 2 – Calculation table for task-3

y	x_1	x_2	*z=ln(y)*	*u=ln(x₁)*	*v=ln(x₂)*	ŷ	e=y- ŷ	e^2
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,000	1,000	1,000	0,693	0,000	0,000	1,862	0,138	0,019
3,000	1,000	2,000	1,099	0,000	0,693	3,048	-0,048	0,002
4,000	2,000	2,000	1,386	0,693	0,693	3,664	0,336	0,113
5,000	3,000	3,000	1,609	1,099	1,099	5,443	-0,443	0,196
5,000	4,000	3,000	1,609	1,386	1,099	5,875	-0,875	0,766
7,000	5,000	4,000	1,946	1,609	1,386	7,648	-0,648	0,420
14,000	8,000	6,000	2,639	2,079	1,792	11,558	2,442	5,963
							S31=7,479	

Часть-2 задачи-3.

11). Пункты 1-9 не исчерпывают содержание и смысл задачи-3. Не раскрыт важный вопрос: каков критерий оптимальности параметров в уравнении (22), ведь критерий уравнения (19) сформулирован в терминах вспомогательной задачи, а не основной.

12). Заменим в выражении (19) вспомогательные переменные исходными выражениями, получим:

$$S4(\gamma, \alpha, \beta)=\sum[\ln(y_i)-\ln(\hat{y}_i)]^2 \rightarrow \min. \tag{23}$$

13). Преобразуем выражение (23), опираясь на свойство логарифмов, получаем критерий оптимальности в терминах исходной задачи:

$$S4(\gamma, \alpha, \beta)=\sum\ln^2(y_i/\hat{y}_i) \rightarrow \min. \tag{24}$$

Выражение (24) – это критерий для определения оптимальных параметров уравнения (14). Они должны минимизировать функцию S4 − сумму квадратов *логарифмов относительных отклонений* − частных от деления значений наблюдённых y_i на регрессионные $\hat{y}_i$, рисунок.

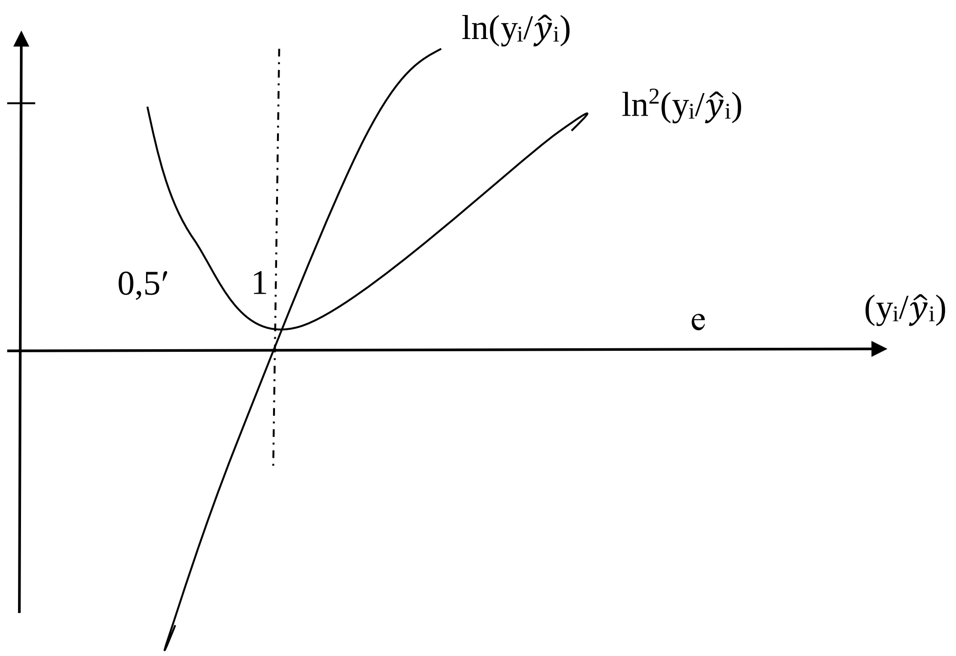

Рисунок 1 – Линии логарифма относительного отклонения ε=y/ŷ и квадрата этого логарифма

Figure 1 – Lines of the logarithm of the relative deviation ε=y/ŷ and the square of this logarithm

Вывод по задаче-3. Использование мультипликативного отклонения ε_3 с последующим переходом к вспомогательному линейному уравнению *приводит к принципиально иному критерию оптимальности.* Назовём этот метод "Логарифмированный МНК", *МНКЛ-метод.*

Примечание. Критерий (24) можно сконструировать иначе. На основе уравнения (15) запишем выражение для *относительного* отклонения (другого не дано):

$$\varepsilon_3=y/\hat{y}=y/(\gamma x_1^{\alpha} x_2^{\beta}). \tag{25}$$

На этой основе можно сформировать такой, например, критерий оптимальности: $S5=\Sigma(y/\hat{y})^2$. Однако он не выдерживает проверки. Требуется, во-первых, заменить в нём значение $\varepsilon_2=1$ нулём − это может сделать функция ln, во-вторых, нужно поднять левую ветвь линии логарифма, стремящуюся вниз к $-\infty$, это сделает квадрат логарифма. Теперь получается критерий (24) − искомая унимодальная поверхность S4, рисунок.

Формулировка и решение задачи-4. Особенность этой задачи также определяется типом стохастической регрессионной модели:

$$y=\gamma\cdot x_1^{\alpha}\cdot x_2^{\beta}+\varepsilon_4, \quad (26)$$

где ε_4 – случайная величина, привычное *аддитивное* отклонение (возмущение). Для модели (26) функция Кобба−Дугласа (14) классифицируется так: она является нелинейной по параметрам и внутренне нелинейной, поскольку не поддаётся линеаризации. Соответствующий критерий оптимальности:

$$S5(\gamma,\alpha,\beta)=\sum(y_i-\hat{y}_i)^2=\sum(\hat{y}_i^2-2\hat{y}_iy_i+y_i^2)=\sum\hat{y}_i^2-2\sum\hat{y}_iy_i+\sum y_i^2=$$
$$=\gamma^2\sum x_1^{2\alpha}\cdot x_2^{2\beta}-2\gamma\sum x_1^{\alpha}x_2^{\beta}y_i+\sum y_i^2\rightarrow \min. \quad (27)$$

Заметим, что S5 измеряется в руб.^{2}. Система нелинейных уравнений:

$$\nabla S5(\gamma,\alpha,\beta)=\nabla\sum\varepsilon_3^2=\nabla\sum(\hat{y}_i-y_i)^2=0 \quad (28)$$

аналитически (через формулу) не разрешается. Единственный выход – применить численный метод решения. Такой метод назовём "численный МНК", сокращённо – МНКЧ. Здесь так же, как и в задаче-3, можно из Excel использовать надстройку Поиск решения. Но для понимания характера поверхности функции S6 представляет интерес решить задачу вручную (используя на отдельных шагах Excel). В работе [7, Крамаренко, Настин] показано эффективное использование метода циклического покоординатного спуска. Используем его (не нужно вычислять направления поиска). Ограничения, вытекающие из экономического смысла задачи и метода: γ, α, β, $S6(\gamma, \alpha, \beta)>0$.

Сначала применим 1-ю производную (она несложная) для γ:

$$\partial S5(\gamma,\alpha,\beta)/\partial\gamma=2\gamma\sum x_1^{2\alpha}\cdot x_2^{2\beta}-2\sum x_1^{\alpha}x_2^{\beta}yi=0. \quad (29)$$

Отсюда находим оптимальное значение γ:

$$\gamma_{опт}=\sum x_1^{\alpha}\cdot x_2^{\beta}\cdot yi/\sum x_1^{2\alpha}\cdot x_2^{2\beta}. \quad (30)$$

Это выражение будем использовать при циклическом поиске.

На первом шаге принимаем произвольные (из опыта, интуиции) значения: $\alpha=\beta=0{,}5$. Оптимальное значение γ вычислим, используя таблицу 3 и формулу (30). Графы 2, 4 и 5 взяты из таблицы 1.

Таблица 3 − Расчет $\gamma_{опт}$ при $\alpha=\beta=0{,}5$
Table 3 - Calculation of γ_{opt} at $\alpha=\beta=0{,}5$

№ п/п	y	y^2	x_1	x_2	x_1^α	x_2^β	yi·x_1^α··x_2^β	x_1^(2α)··x2^(2β)
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
1	2	4,000	1	1	1,000	1,000	2,000	1,000
2	3	9,000	1	2	1,000	1,414	4,243	2,000
3	4	16,000	2	2	1,414	1,414	8,000	4,000
4	5	25,000	3	3	1,732	1,732	15,000	9,000
5	5	25,000	4	3	2,000	1,732	17,321	12,000
6	7	49,000	5	4	2,236	2,000	31,305	20,000
7	14	196,000	8	6	2,828	2,449	96,995	48,000
Сумма	40,000	324,000	24,000	21,000	12,211	11,742	174,863	96,000

На основе граф 8-9 и нижней строки таблицы 3 получаем:

$$\gamma_{опт} = 174{,}863 / 96{,}000 = 1{,}821.$$

Закрепим значения γ=1,821, β=0,5 и будем двигаться по оси α с шагом 0,1 для поиска минимума целевой функции S5, таблица 4.

Таблица 4 – Поиск оптимального значения α
Table 4 – Search for the optimal value of α

γ	α	β	S5
1,821	**0,4**	0,5	14,913
1,821	**0,5**	**0,5**	**5,489**
1,821	**0,6**	0,5	15,403

Принимаем значение α=0,5 и будем двигаться по оси β с шагом 0,1 для поиска минимума S5, таблица 5.

Таблица 5 – Поиск оптимального значения β
Table 5 - Search for the optimal value of β

γ	α	β	S5
1,821	0,5	**0,4**	13,120
1,821	**0,5**	**0,5**	**5,489**
1,821	0,5	**0,6**	12,205

Принимаем значение β = 0,5. Поскольку коэффициенты α и β остались неизменными, значение $\gamma_{опт}$ также остается прежним.

Повторим цикл поиска минимума функции S5 по осям α и β сначала с шагом 0,01, а затем с шагом 0,001(эти расчёты мы здесь не приводим). Получаем: минимум суммы квадратов отклонений $S5_{мин}=\sum(yi - \hat{y}i)^2 = \sum\varepsilon_4^2$ = = 5,232; этот минимум доставляют значения параметров: γ = 1,763, α = 0,517, β = 0,501.

Конец поиска.

Итак, помимо первого варианта функции Кобба–Дугласа – выражение (22) – получен второй вариант с числовыми значениями параметров:

$$\hat{y} = 1{,}763 \cdot x_1^{0{,}517} \cdot x_2^{0{,}501} \tag{31}$$

В таблице 6 сопоставлены варианты (22) и (31) функций Кобба–Дугласа.

Таблица 6 – Функции Кобба–Дугласа, полученные по двум МНК-методам
Table 6 – Cobb-Douglas functions obtained using two least squares methods

Тип МНК-метода	γ	α	β	S
МНКЛ – с мультипликативным отклонением ε_2 и логарифмированием	1,862	0,266	0,711	S34=7,173
МНКЧ – с аддитивным отклонением ε_3 и численным методом	1,763	0,517	0,501	S5=5,232

Обсудим экономический смысл показателей из таблицы 6.

1) Чем больше γ, тем лучше: при одних и тех же затратах больше объём производства (выше уровень технологии).

2) Значения параметров α и β при заданных значениях переменных x_1 и x_2 функции эластичности объема производства по этим переменным определяются формулами

$$E_{x1}(y) = \alpha; \qquad E_{x2}(y) = \beta.$$

3) При увеличении затрат капитала α на 1 % объем производства по МНКЛ-методу увеличивается на 0,266 % , а по МНКЧ-методу − на 0,517 %.

4) При увеличении затрат труда β на 1% объем производства по МНКЛ-методу увеличивается на 0,711 %, а по МНКЧ-методу − на 0,501 %.

Конец решения задачи-4.

Заключение. Конечно, мы не исчерпали всей проблематики, связанной с использованием критериев оптимальности. Например, в качестве такого критерия можно использовать сумму модулей или квадрата минимакса [8, Уилкс, подраздел 16.3].

Список источников

1. Настин Ю. Я. Развитие, содержание и границы эконометрики // Балтийский экономический журнал. 2019. № 3(21). С. 88-94.

2. Сергеев Л. И. Регрессионный анализ макроэкономических параметров развития рыбной отрасли // Балтийский экономический журнал. 2018. № 1(21). С. 86-99

3. Карлов А. М. Теория вероятностей и математическая статистика для экономистов: учеб. пособие. Москва: КноРус, 2015. 264 с.

4. Берндт Э. Р. Практика эконометрики: классика и современность: учеб. Москва: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. 863 с.

5. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. Москва: Статистика, 1973. 392 с.

6. Математический энциклопедический словарь. Москва: Научное изд-во "Большая российская энциклопедия", 1995. 846 с.

7 Крамаренко И. А., Настин Ю. Я. Анализ нелинейного и несепарабельного по параметрам уравнения регрессии диверсифицированного портфеля ценных бумаг // Балтийский экономический журнал. 2023. № 4(44). С. 33-46

8. Уилкс С. Математическая статистика. Москва: Изд-во "Наука", 1967. 632 с.

References

1. Nastin Yu. Ya. Development, content and boundaries of econometrics // Baltic Economic Journal. 2019;3(21):88-94. (In Russ.).

2. Sergeev L. I. Regression analysis of macroeconomic parameters of the development of the fishing industry // Baltic Economic Journal. 2018;1(21):86-99. (In Russ.).

3. Karlov A. M. Probability theory and mathematical statistics for economists: textbook. allowance. Moscow: KnoRus, 2015. 264 p. (In Russ.).

4. Berndt E. R. The practice of econometrics: classics and modernity: textbook. Moscow: UNITY-DANA, 2005. 863 p.

5. Draper N., Smith G. Applied regression analysis. Moscow: Statistics, 1973. 392 p.

6. Mathematical encyclopedic dictionary. Moscow: Scientific publishing house "Big Russian Encyclopedia", 1995. 846 p. (In Russ.).

7. Kramarenko I. A., Nastin Yu.Ya. Analysis of a nonlinear and non-separable regression equation for a diversified securities portfolio // Baltic Economic Journal. 2023;4 (44):33-46. (In Russ.).

8. Wilks S. Mathematical statistics. Moscow: Publishing house "Nauka", 1967. 632 p.

Информация об авторах

Ю. Я. Настин – канд. экон. наук, доцент ИНОТЭКУ ФГБОУ ВО "Калининградский государственный технический университет".

А. В. Казанцев − студент магистратуры ИНОТЭКУ ФГБОУ ВО "Калининградский государственный технический университет".

Information about the authors

Yu. Ya. Nastin – candidate of econ. sciences, associate professor of INOTEKU FGBOU VO "Kaliningrad State Technical University"

A. V. Kazantsev − student of INOTECU FGBOU VO "Kaliningrad State Technical University"

Статья поступила в редакцию 03.02.2024; одобрена после рецензирования 05.02.2024; принята к публикации 06.02.2024.

The article was submitted 03.02.2024; approved after reviewing 05.02.2024; accepted for publication 06.02.2024.